Model de parțial

Algebră liniară

2025

1. (a) Definiți noțiunile de sistem de vectori liniar independent și sistem de generatori.
   (b) Dați exemple de patru sisteme de vectori din $\mathbb{R}^2$ care să fie, respectiv să nu fie sisteme liniar independente, sisteme de generatori.
   (c) Enunțați și demonstrați teorema de caracterizare a dependenței liniare.

2. (a) Definiți noțiunea de subspațiu liniar și de subspațiu liniar generat de o mulțime. Dați un exemplu de subspațiu liniar al lui $\mathbb{R}^2$ și un exemplu de submulțime a lui $\mathbb{R}^2$ care nu este subspațiu liniar.
   (b) Dacă U și V sunt subspații liniare ale $\mathbb{K}$-spațiului liniar W, demonstrați că $U \cap V$ este un subspațiu liniar.
   (c) Dați exemple de doua subspații liniare ale lui $\left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$, astfel încât suma lor directa sa fie întreg $\mathbb{R}^2$. Cele două legi de compoziție sunt $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ și $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.

3. Precizați care sunt legile de compoziție în raport cu care $\mathbb{K}[X]$ și $\mathbb{K}_n[X]$ sunt spatii liniare peste câmpul $\mathbb{K}$. Specificați baza canonică și dimensiunea lui $\mathbb{K}_n[X]$.
   (a) Verificați, cu ajutorul definiției, ca
   $$\mathcal{B}' = \left\{v_1 = 1, v_2 = 1 + X, v_3 = 1 + X + X^2, v_4 = 1 + X + X^2 + X^3\right\}$$
   este bază în $\mathbb{R}_3[X]$. Scrieți matricea de trecere de la baza canonica $\mathcal{B}$ a spațiului $\mathbb{R}_3[X]$ la baza $\mathcal{B}'$ și determinați coordonatele vectorului $p = 3X - 2X^2 + 5X^3$ în raport cu cele doua baze.
   (b) Precizați dacă $S_1 = \left\{u_1 = 2, u_2 = 1 + 3X, u_3 = 2 + 3X^2\right\}, S_2 = \left\{X, X + 1, X^2, X^3\right\}$ sunt baze în $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Fie p un polinom de grad n fixat arbitrar în $\mathbb{R}_n[X]$. Demonstrați că $S = \left\{p, p', p'', \cdots, p^{(n)}\right\}$ este baza în $\mathbb{R}_n[X]$, unde p' este polinomul derivat asociat lui p : pentru $p = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, avem $p' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}$.

4. Fie
   $$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$
   Scrieți elementele lui W sub o alta forma și verificați ca W este subspațiu liniar al lui $\mathbb{R}^4$. Determinați o baza în W și completați-o la o bază în $\mathbb{R}^4$.

Timp de lucru: 110 minute